A Matemática da Complexidade

Rui Vilela Mendes

Considerando a Matemática como uma Metáfora, a própria interpretação do conhecimento matemático é um acto altamente criativo. Num certo sentido a Matemática é uma novela acerca da Natureza e da Humanidade. E não se pode dizer precisamente o que é que a Matemática nos ensina, do mesmo modo que não se pode dizer exactamente o que é que a leitura de Guerra e Paz nos ensina.
O ensinamento é incorporado ele próprio no acto de repensar este ensinamento.

Y.I. Manin

Não há dúvida que a Natureza à nossa volta, de que nós próprios somos uma parte, é bastante complexa. Os fenómenos físicos são complexos, o comportamento colectivo das sociedades é complexo, a organização celular do organismo é complexa, o comportamento do tempo e dos temporais é complexo, as previsões económicas são simples, mas depois a economia real é complexa, o próprio cérebro do Ministro das Finanças é um sistema complexo com cerca de 10^{12} neurónios.

Como amador das matemáticas, interessado no estudo das complexidades, pus-me à procura de quais as matemáticas que teria de aprender para poder estudar os sistemas complexos e as suas complexidades. Seria a análise? Seria a geometria? A lógica e a teoria dos números não deviam ser com certeza. Essas coisas não servem para nada! Aliás, praticamente todos os matemáticos do nosso burgo que se dizem aplicados (leia-se relevantes e financiáveis) são analistas. Portanto devia ser a análise. Aprendia umas equaçõezinhas diferenciais e a complexidade estava no papo!

Para descobrir a Matemática da Complexidade, porque não manipular um pouco o próprio nome da dita. Peguei então no título "A Matemática da Complexidade", meti-o num quadrado de lado um e dei-lhe a seguinte transformação:

$$\begin{aligned} x &\to x + y \quad (\text{mod. } 1) \\ y &\to x + 2y \quad (\text{mod. } 1) \end{aligned}$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e repeti isto 4 vezes. O resultado foi o seguinte:

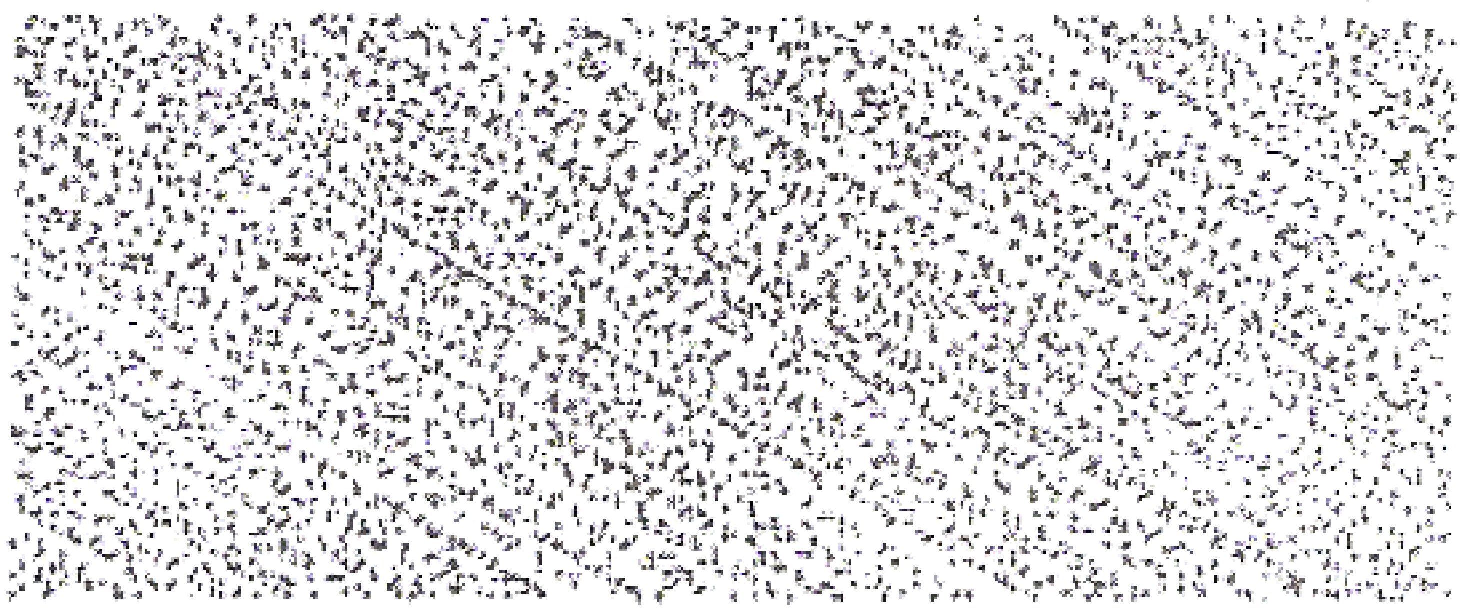

Figura 1

Absolutamente incompreensível. Ficou tudo misturado. A informação que existia no título inicial e que provinha da posição relativa dos pontos negros (sobre o fundo branco) ficou totalmente perdida.

E se tentássemos outra transformação. Por exemplo:

$$x \to \frac{6}{7}x - \frac{5}{7}y \qquad (\text{mod.}1)$$

$$y \to \frac{5}{7}x + \frac{4}{7}y \qquad (\text{mod.}1)$$

ou em forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

A mesma receita. Itera-se quatro vezes o processo e o resultado é

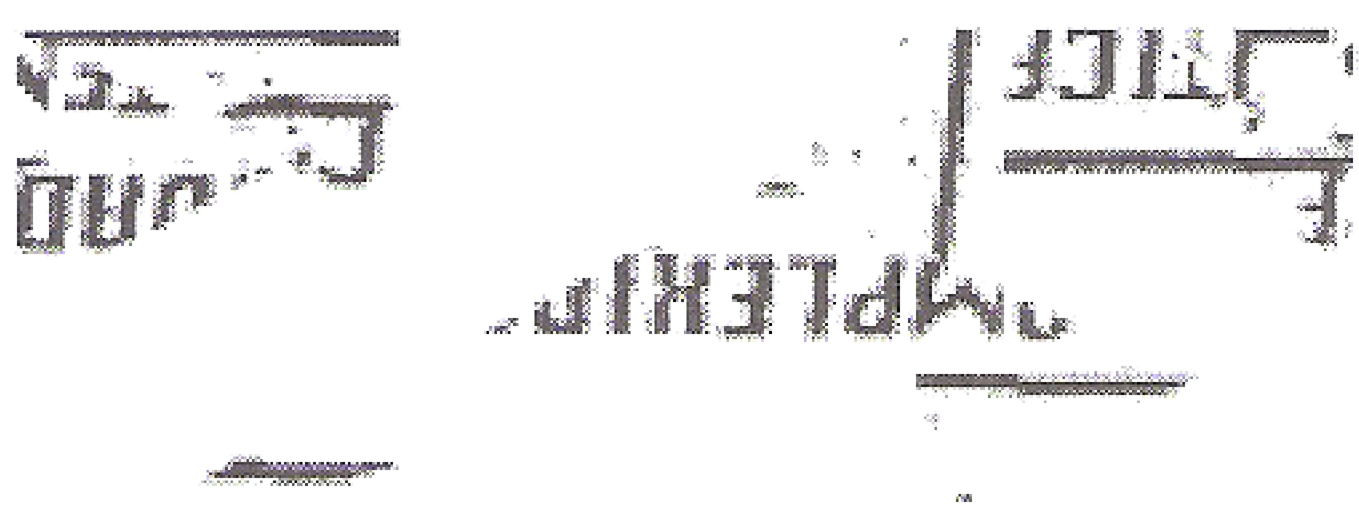

Figura 2

Desta vez ainda se percebem as letras. Estranho! O que é que há de tão diferente entre as duas transformações? Afinal as matrizes de transformação são ambas matrizes numéricas, simples transformações lineares, e até têm ambas determinante igual a um. A diferença é que no primeiro caso a matriz é hiperbólica e no segundo caso é elíptica. No segundo caso os dois valores próprios são complexos e de módulo um, enquanto que no primeiro são reais, um deles maior que um e outro menor que um. (Recordemos que o produto dos dois valores próprios tem de ser um porque o determinante vale um). No segundo caso há apenas uma rotação enquanto que no primeiro há uma direcção que se expande e outra que é comprimida. Neste processo de esticar numa direcção, comprimir na outra e depois dobrar-se sobre si própria, perde-se a coerência da imagem porque pontos que estavam próximos vão-se afastando cada vez mais e, no final, fica tudo misturado.

O fenómeno que acabámos de descrever é a base do *chamado comportamento caótico dos sistemas dinâmicos*. E embora se trate aqui duma lei de transformação perfeitamente determinista, o comportamento diz-se caótico porque, na prática, é imprevisível. Suponhamos que queremos prever a trajectória de um ponto de coordenadas (0.5,0.5), que vamos marcar a lápis no interior do quadrado. Fazendo as contas, com a primeira das transformações, é fácil de ver que ao fim de 7 iterações o ponto deverá estar na posição (0.0,0.5). Mas basta que na marcação façamos um pequeno erro de 0,001 para que, ao fim de 7 iterações, o erro se possa ter tornado da ordem de 1. Isto é, o ponto pode estar em qualquer sítio dentro do quadrado e a nossa previsão não serviu para nada. A este fenómeno chama-se *dependência sensível das condições iniciais*.

Embora tudo isto já fosse conhecido por Birkhoff e até mesmo por Poincaré, a tomada de consciência, pela comunidade científica, de que este comportamento imprevisível existe na maioria dos fenómenos naturais, data dos trabalhos de Lorentz que, ao estudar um modelo simples do movimento da atmosfera, descobriu que, em regímen estacionário, o seu modelo se movia numa região do espaço das variáveis com uma estrutura bastante complicada. Dentro dessa região havia dependência sensível das condições iniciais, daí a dificuldade de prever o tempo para além de poucos dias, às vezes mesmo para além de algumas horas. Nessa região onde o movimento se concentrava, chamada o *atractor*, para além de verdadeiros comportamentos aperiódicos, havia também órbitas periódicas de todos os períodos e tudo bem misturado e com uma dinâmica imprevisível por causa da dependência sensível. Uma confusão! A esta estranha entidade passou a chamar-se um *atractor estranho*.

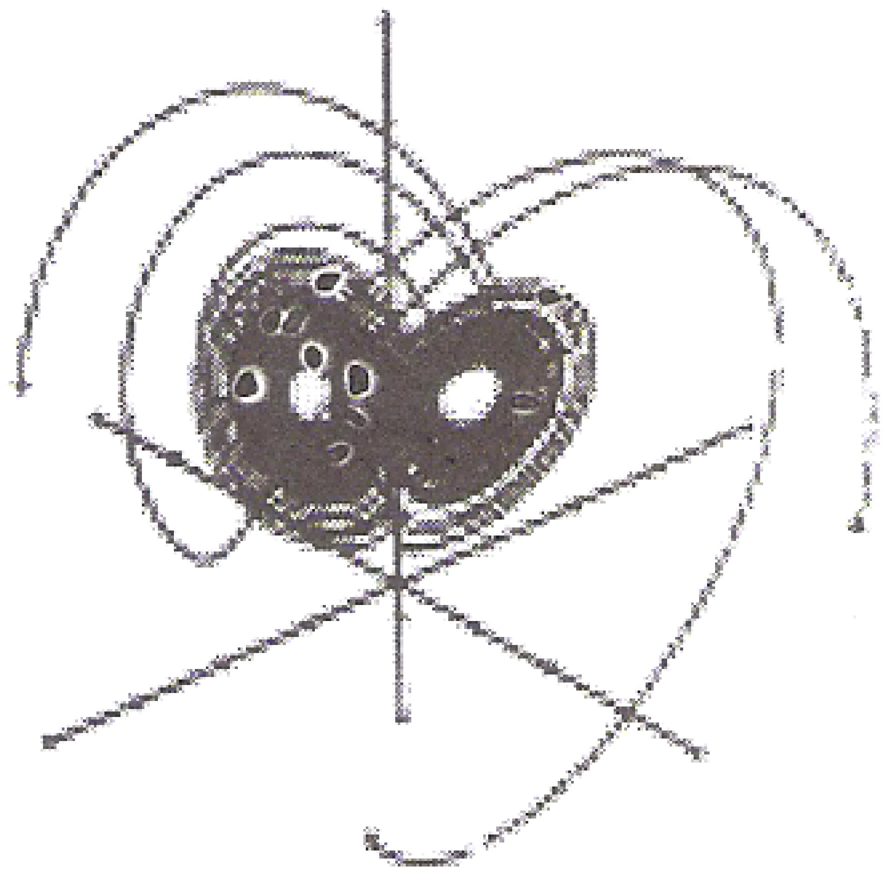

Figura 3. O atractor de Lorenz.

Os aspectos funcionais (valores próprios ou taxas de expansão) e os aspectos geométricos globais dos atractores são importantes, mas, na prática, o que mais importa saber é qual a probabilidade de termos um ou outro comportamento entre os muitos possíveis. Há, portanto, que estudar a probabilidade das diversas regiões no espaço das variáveis, e aqui é a teoria da medida (ou teoria ergódica) que desempenha o papel crucial.

Qual é então a matemática da complexidade? Enfim, um pouco de análise, um pouco de geometria e muita teoria da medida. Mas será tudo?

Examinemos à lupa um desses atractores estranhos:

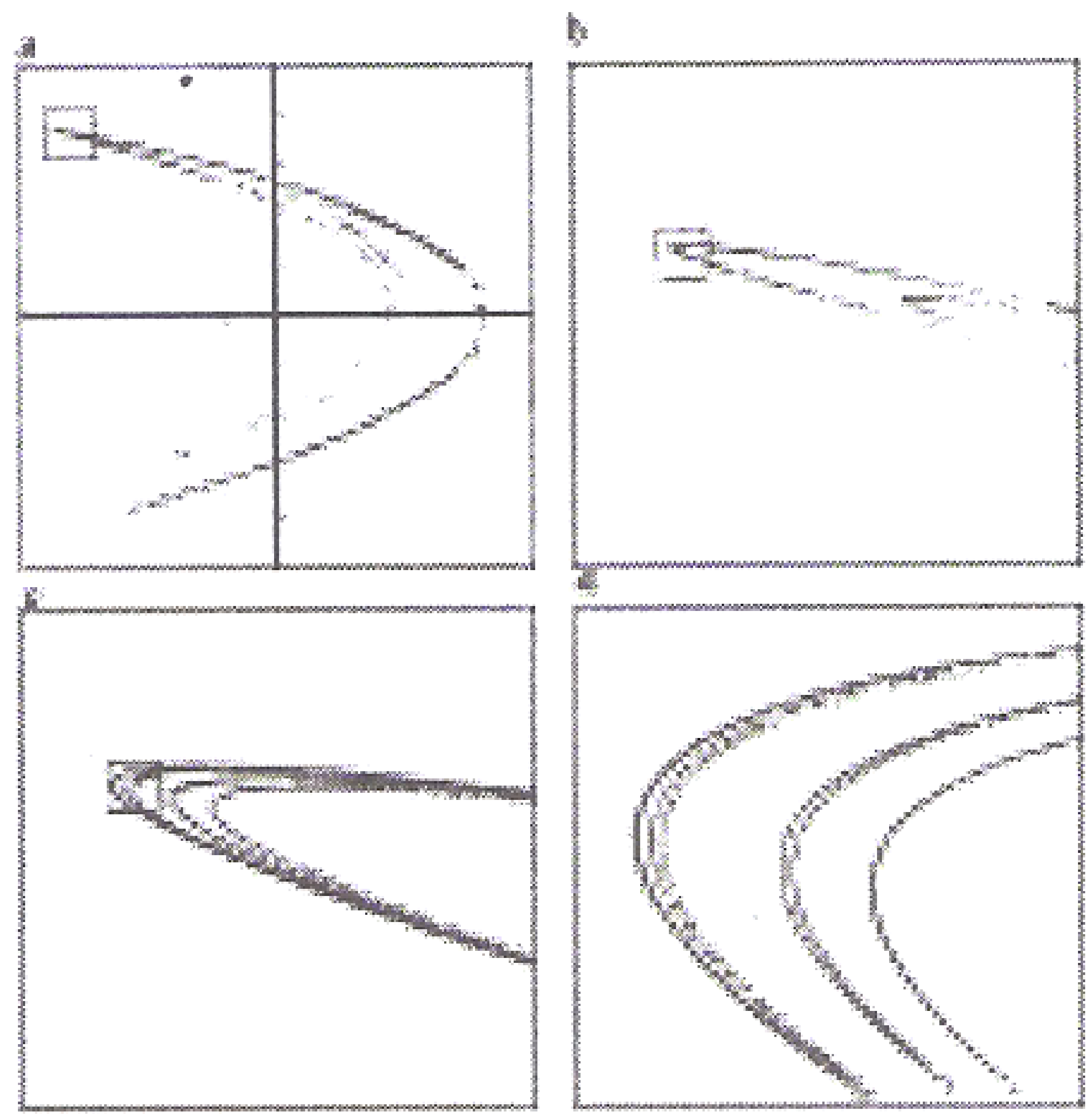

Figura 4. Um atractor estranho examinado a diversas escalas de amplificação.

Figura 5. O conjunto ternário de Cantor.

O que verificamos é que à medida que a nossa lupa se vai tornando mais potente, o padrão que se obtém é sempre o mesmo. O objecto repete-se em todas as escalas, tem o que se chama um *comportamento auto-similar*. Mas isto lembra-nos a construção do conjunto de Cantor.

E se o atractor é como um conjunto de Cantor, então é um objecto de dimensão não-inteira, um objecto fractal. Objectos fractais! Essas linhas que não são linhas, porque têm dimensão maior que um, e essas superfícies que não são superfícies porque têm dimensão maior que dois!

Mas será que estes objectos fractais existem na Natureza? Não serão apenas aberrações dos modelos construídos pelas mentes patológicas dos matemáticos?

Consideremos um objecto liniforme de dimensão D, que se vai medir contando o número de segmentos de comprimento E que é necessário ter para cobrir completamente o tal objecto liniforme. O número de segmentos vai ser proporcional a $(1/E^D)$ e o comprimento total do objecto será portanto proporcional a $E \times (1/E^D) = E^{1-D}$. Fazendo esta medição para vários valores de E, se o objecto liniforme for de facto uma linha (dimensão D = 1) o valor que se obtém vai ser sempre a mesma constante, independentemente de E.

Em 1961 Richardson entreteve-se a medir o comprimento das fronteiras e das costas de diversos países, usando diversas escalas E diferentes. O resultado está reproduzido na figura abaixo.

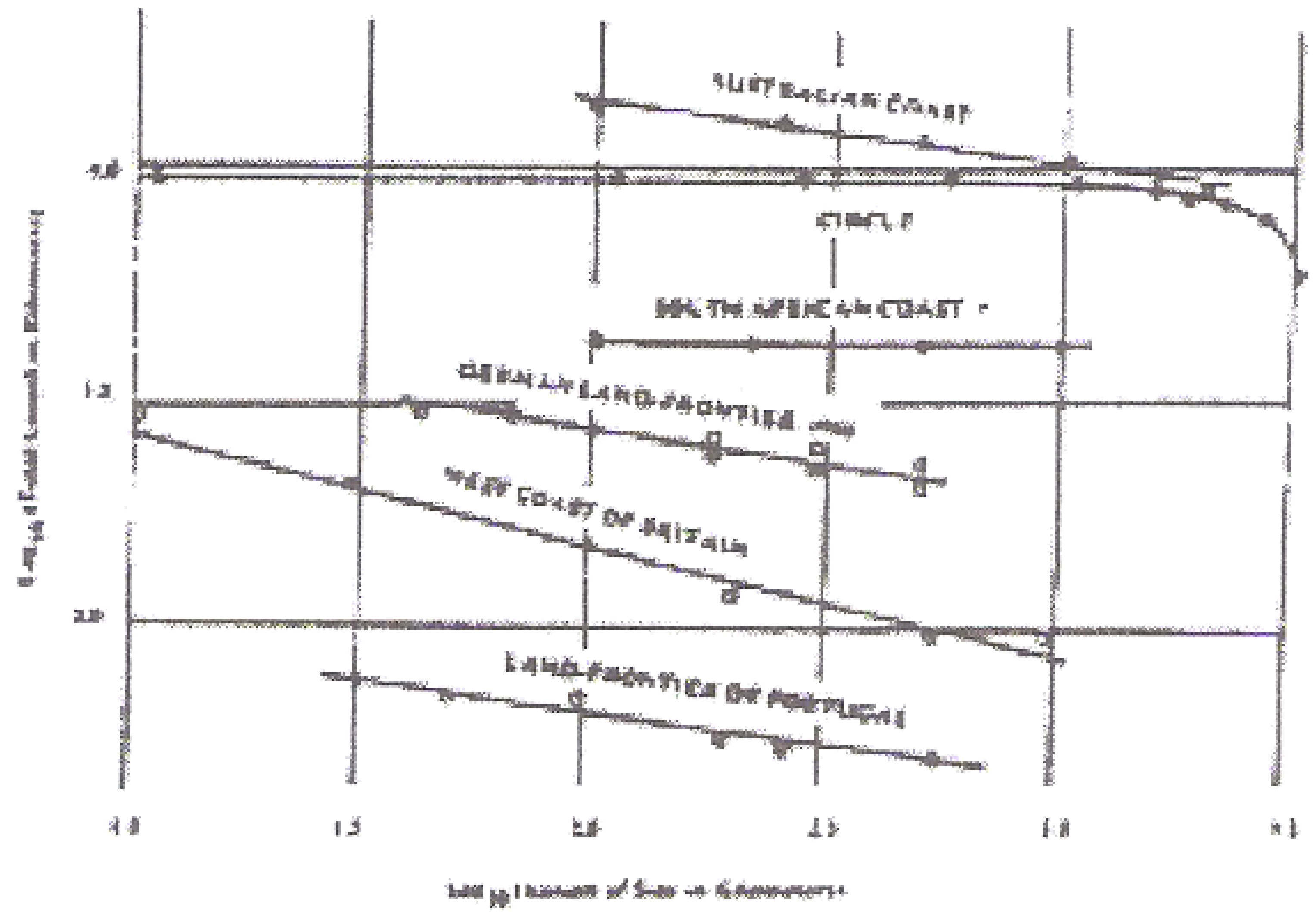

Figura 6.

Verifica-se que todas as costas e todas as fronteiras estudadas são fractais e de dimensão entre 3/2 e 5/4. Na mesma figura, para comparação, está o resultado do mesmo tipo de medida feita sobre um círculo que, é claro, tem dimensão igual a um, como qualquer círculo que se preza. Richardson notou também, consultando os valores indicados nas enciclopédias, que numa enciclopédia espanhola se dizia que a fronteira Portugal-Espanha tinha 987 km, enquanto numa enciclopédia portuguesa dizia que eram 1241 km. De facto estão ambas certas. Se a dimensão for 5/4, significa apenas que a escala de medida (o E), num caso e noutro, diferem por um factor de dois.

Posteriormente foi amplamente mostrado por Mandelbrot que os objectos fractais e a geometria fractal existem por toda a parte na Natureza e as construções matemáticas apresentam singulares semelhanças com as formas naturais (Figura 7). A própria turbulência, fenómeno omnipresente na atmosfera, no movimento dos fluidos e na tecnologia, também só pode ser compreendida recorrendo às noções da matemática fractal.

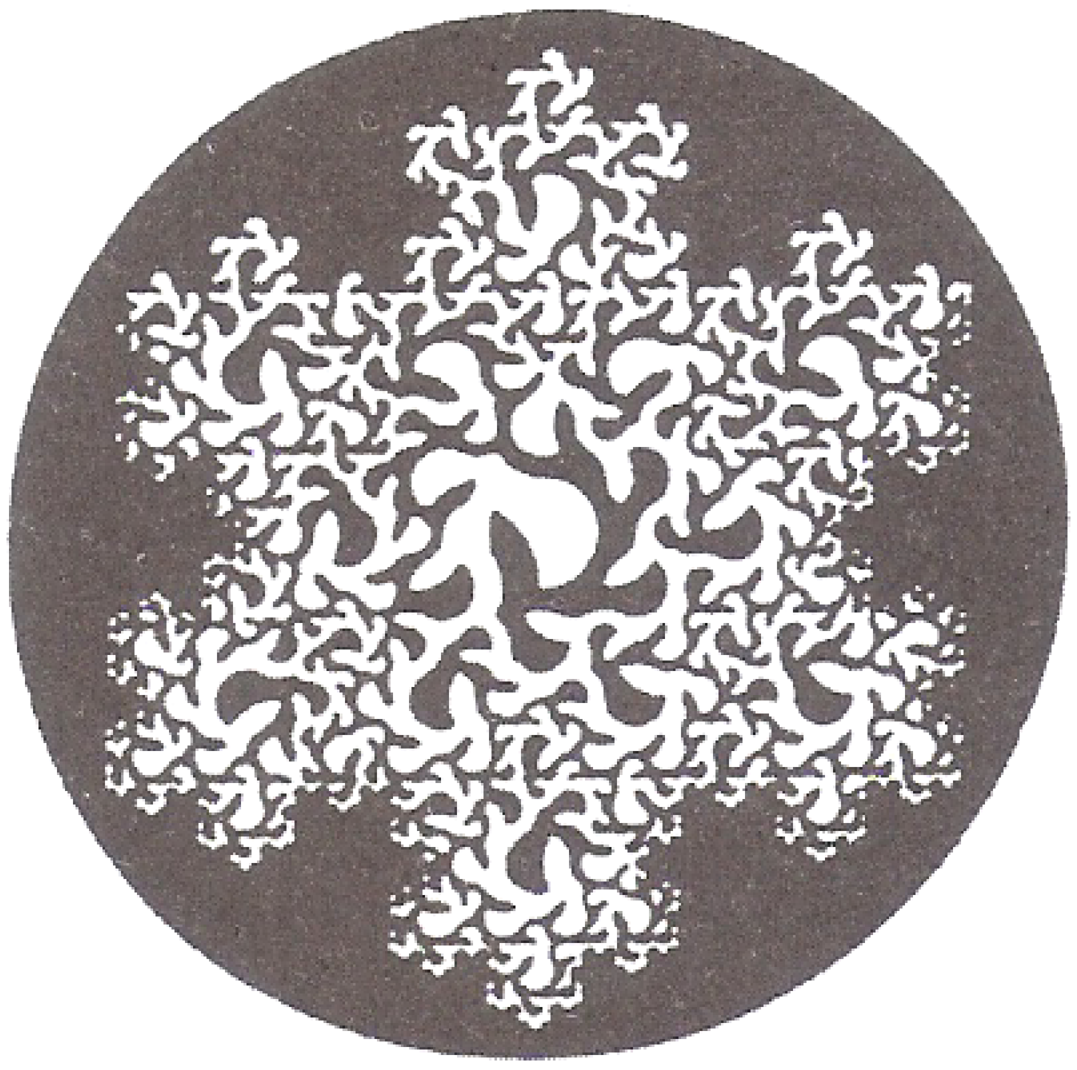

Figura 7. O «lago» triádico de Koch e as suas ondas fractais (a dimensão da "linha de costa" é 1,2618).

Afinal qual é a matemática da complexidade? É a análise com certeza, mas também é a geometria e a teoria da medida e as probabilidades e a geometria fractal e a teoria da dimensão. Uf! Será que ficamos por aqui?

Nos casos que até agora examinámos, vimos essencialmente sistemas simples (isto é, sistemas com poucas variáveis ou fáceis de descrever estáticamente), mas que têm um comportamento dinâmico complicado. Pode-se dizer que, até agora, tratámos de sistemas simples com comportamento complexo. Nas *ciências da complexidade* temos também de estudar a situação inversa, isto é, o caso de sistemas complexos com comportamentos que podem ser simples ou complexos.

Examinando aquilo que nas diversas ciências se chama um sistema complexo, podemos observar que, em geral, se trata de sistemas compostos de muitas partes e cujo comportamento colectivo é qualitativamente diferente do comportamento das suas partes. Além disso, o comportamento dos sistemas ditos complexos apresenta, em geral, um certo grau de robustez, na medida em que o comportamento colectivo não é alterado quando se altera ligeiramente a dinâmica das suas componentes. E quando tratamos de tais sistemas, desgraça a nossa, lá encontramos matéria diferente!

Uma característica de muitos desses sistemas é a existência de tendências contraditórias nas interacções individuais dos elementos que constituem o sistema complexo. Quando, no estado global que o sistema complexo assume, é de todo impossível satisfazer todas as exigências individuais dos seus elementos, diz-se que se tem uma situação de *frustração*. Esta situação é comum nos sistemas desordenados que aparecem na física e na tecnologia, mas é talvez mais simples explicá-la com um exemplo social. Suponhamos três indivíduos que têm de se organizar no máximo em dois grupos diferentes (grupos ou equipas de trabalho, ou partidos, ou seja o que for). Se os três forem amigos, ficam todos no mesmo grupo e ficam felizes. Se dois deles forem inimigos do terceiro, mas amigos entre si, também não há problema. Formam-se dois grupos separados e não se aborrecem. Mas se forem todos inimigos uns dos outros, ou se dois deles forem inimigos, mas amigos do terceiro, não há maneira de dividir em dois grupos e satisfazer inteiramente toda a gente. Há sempre alguém que fica *frustrado*, ou porque tem no seu grupo inimigos, ou porque não tem todos os amigos que poderia ter. Nos casos em que há frustração é também evidente que, em vez de haver apenas uma solução óptima, há uma série de soluções todas elas equivalentes e todas elas, também, que não são completamente satisfatórias para toda a gente. O que se verificou, para sistemas com muitos agentes e em que as interacções inter-pessoais podem levar a situações de frustração, é que há muitos estados possíveis de acomodação que se organizam duma maneira hierárquica como ramos de uma árvore. As noções de distância são, então, muito diferentes da noção de distância habitual e o sistema de numeração adequado a tal sistema é um campo p-ádico. A ocorrência de sistemas que têm de ser classificados usando campos não-arquimedianos é muito frequente em sistemas da física e da biologia, na taxonomia e nas ciências sociais. Quem estiver interessado em mais detalhes poderá ver o meu artigo "Os formalismos físicos e a realidade matemática" na página 183 e a bibliografia lá indicada.

Aqui gostaria apenas de voltar ao caso da organização, em grupos, de indivíduos com interacções potencialmente contraditórias de amizade e inimizade, e de tirar algumas consequências especulativas de resultados conhecidos para o caso em que o número de indivíduos é muito grande. Suponhamos então que temos N pessoas que, aleatoriamente, podem ser amigos ou inimigos, e queremos organizá-las em dois grupos de $N/2$ péssoas, tentando manter no mesmo grupo o máximo de amigos e separando o mais possível os inimigos. Para N grande o melhor resultado possível é que o número médio de amigos menos o número médio de inimigos de cada membro dos grupos é $0{,}76332/2\,\sqrt{N}$. Dividindo por $N/2$ obtém-se o grau de satisfação médio que cada indivíduo experimenta como resultado de acrescentar mais um elemento ao grupo. Este valor, como se vê, vai diminuindo como o inverso da raiz quadrada de N. Modelos com interacções mais complicadas e com divisões em grupos mais complexas, teriam resultados semelhantes. Uma possível conclusão especulativa é que, quando uma aglomeração de pessoas (uma cidade) cresce, as vantagens sociais e culturais que advêm da vida em comunidade começam a ser suplantadas pelos factores de agressão ou inimizade e o crescimento deixa de ter qualquer vantagem. Talvez as pessoas fossem mais felizes vivendo em pequenas comunidades, ligadas electronicamente umas às outras para continuar a beneficiar das vantagens culturais. Até porque agressões electrónicas podem sempre ser desligadas. Basta carregar no botão.

Já dizia o Gengis Khan:

É preciso arrasar todas as cidades, para que o mundo inteiro se torne uma imensa estepe onde as mães mongóis criarão crianças livres e felizes.

Será que o cruel mongol tinha estudado a matemática dos sistemas complexos?

E com as estruturas hierárquicas e as suas distâncias ultramétricas lá não nos escapámos da análise p-ádica e da teoria dos números! E quando na configuração do estado dum sistema complexo coexistirem várias estruturas hierárquicas simultâneas (e não equivalentes), os p-ádicos são capazes de não chegar e teremos de recorrer aos adeles. Raios! Também não nos livramos da teoria algébrica dos números.

Devem ter reparado que, até agora, estivemos a falar de complexidade, de sistemas complexos e da sua matemática, sem tentar uma definição rigorosa do que é a complexidade. Melhor seria ter uma quantidade com valores numéricos que fosse uma medida da complexidade. Ou talvez um aparelho. O ideal seria mesmo poder construir um complexímetro, através do qual pudéssemos fazer passar os candidatos aos cargos públicos.

Antes de tratar do problema de como quantificar a noção (ou as noções) de complexidade, examinemos algumas definições gerais tentadas por alguns autores:

Um objecto (físico ou intelectual) é complexo se contém informação difícil de obter.

(David Ruelle)

Complexidade é a dificuldade de uma tarefa com significado. Complexidade dum instrumento (máquina, algoritmo, etc.) é a dificuldade da tarefa mais importante associada a esse instrumento. Complexidade de um objecto é a dificuldade de classificar esse objecto e descrever o conjunto a que ele pertence.

(Peter Grassberger)

Se soubermos classificar todas as possíveis configurações que um sistema assume, usa-se a complexidade da classificação como uma medida da complexidade do sistema. Isto é, um sistema é complexo se o seu comportamento for complexo.
(Giorgio Parisi)

Parece, portanto, que a complexidade está associada à informação que se pode extrair do sistema, à dificuldade de extracção dessa informação, à dificuldade das tarefas que o sistema executa, à dificuldade da sua classificação, etc. Afinal parece que não há só uma noção de complexidade, mas sim várias. De facto...

Uma noção que tem sido muito utilizada é a de *complexidade algorítmica*. As órbitas dinâmicas do sistema, isto é, os sucessivos estados por que ele passa à medida que o tempo evolui, definem o comportamento do sistema. As órbitas podem ser codificadas por uma sequência de números, números binários, por exemplo. Seja S a sequência que descreve a evolução dinâmica do sistema. Seja $M_N(S)$ o comprimento do menor programa que, num certo computador padrão, é capaz de reproduzir os primeiros N símbolos da sequência S. Define-se então *complexidade algorítmica* como o limite:

$$C(S) = \lim_{N \to \infty} \frac{M_N(S)}{N}.$$

Para que esta noção seja independente do computador particular em que é definida, é essencial tomar o limite quando N tende para infinito. A noção não poderia ser definida, dum modo único, para sequências finitas. Esta noção pode, ou não, ser a mais apropriada para caracterizar a complexidade dos sistemas. Note-se, por exemplo, que ela exige que o programa seja capaz de reproduzir fielmente todo o comportamento dinâmico do sistema. Mas se o que mais nos interessar no sistema for a formação de comportamentos globais coerentes, de padrões colectivos, então não nos interessa muito se o programa reproduz ou não todos os pequenos detalhes irrelevantes. Aqui aparece a noção de significado, que está associada a muitas aplicações dos sistemas complexos. Se a questão do significado for a essencial, como o é por exemplo nos sistemas de aprendizagem, então não interessa caracterizar todo o comportamento do sistema, mas sim apenas o que está associado às tarefas com significado.

Uma outra noção é a de *profundidade lógica*. Aqui não se trata do comprimento do menor programa que descreve a sequência S, mas sim do tempo necessário para correr o menor programa que gera S.

A noção de *sofisticação*, por sua vez, tenta distinguir entre o comprimento do código e o comprimento dos dados que é necessário fornecer ao código para que ele possa gerar a sequência S de tamanho N. Se, na definição dada acima, de complexidade algorítmica, for

$$M_N(S) = c_1 + c_2 N,$$

então c_1 será a *sofisticação*, porque se admite que o termo linear no comprimento da sequência representa os dados, enquanto o termo constante seria o verdadeiro comprimento do código.

Uma outra noção procura, na sequência S que descreve o sistema, quais são as regras de formação, isto é a respectiva gramática. A complexidade do sistema é então associada à complexidade da gramática, de acordo com a hierarquia de Chomsky: linguagens regulares, linguagens livres de contexto, linguagens sensíveis ao contexto, conjuntos recursivamente enumeráveis.

O melhor é, portanto, em cada aplicação particular, usar a noção que pareça mais adequada ao fim em vista. E tudo isto, afinal, tem uma certa lógica. Se houvesse uma medida simples de complexidade, a complexidade não seria complexa.

Mas e a matemática, qual é a matemática necessária para lidar com todas estas noções que a qualquer momento nos podem aparecer? É a teoria da informação, é a teoria da computabilidade, é a teoria das linguagens formais. E uma vez que a teoria da computabilidade desempenha papel relevante em muitas destas noções, lá vamos ter, na caracterização dos sistemas complexos, parâmetros não computáveis e questões não decidíveis.

Mas, enfim, já chegámos às medidas de complexidade e parece que, pelo menos, nos escapámos da lógica e dessas coisas horríveis que os matemáticos não-standard estudam. Porém...

Imaginem uma Universidade que tem dois Campus, que vamos chamar o Campus F e o Campus G. Imaginem que o Presidente da Universidade deseja construir um Instituto de Matemática (hipótese improvável e perversa!). Reúne então o Senado Universitário, que tem 60 membros e, depois de os ter fatigado durante horas a fio com trivialidades, põe-lhes a questão:

«Querem construir um Instituto de Matemática? Sim ou Não?»

Para sua satisfação (e espanto!) há 40 sins e 20 nãos. Pergunta a seguir:

«Constroi-se o Instituto no Campus F? Sim ou Não?»

Há 20 sins e 40 nãos. O Presidente conclui então que tem um mandato para construir o Instituto de Matemática no Campus G. Vai dar a reunião por terminada quando um espertalhão diz: "*Senhor Presidente, falta perguntar se se constrói o Instituto de Matemática no Campus G*". Pobre diabo, pensa o Presidente. Mas com um sorriso condescendente diz: *«Seja. Constroi-se o Instituto no Campus G? Sim ou Não?»*

Há 20 sins e 40 nãos. O presidente fica passado. Lá se foi o mandato para construir o Instituto, pensa ele. Mas que gente inconstante! Em vez de ser Presidente da Universidade mais valia ser Presidente do Futebol Clube do Porto! [1]

Resta dizer que o Presidente não era matemático e que o espertalhão era um safado de um lógico. E também, ao contrário do que pensava o Presidente, ninguém tinha mudado de opinião e todos os membros do Senado estavam bem firmes nas suas convicções. A situação é afinal fácil de compreender se examinarmos o quadro abaixo em que se dividiu os membros do Senado em três grupos de 20 com opiniões uniformes e se indica em cada linha as suas respostas (Sim ou Não) às 3 perguntas.

	Construir	Construir no Campus F?	Construir no Campus G?
20	S	S	N
20	S	N	S
20	N	N	N

Cada uma das decisões é tomada por uma confortável maioria de 2/3 e todos os membros do Senado são perfeitamente coerentes consigo próprios. O que é incoerente é o conjunto das decisões colectivas. Aliás, se pensarmos um pouco, situações como esta são frequentes e certamente ocorreriam se, por exemplo, existisse hostilidade entre os matemáticos do Campus F e do Campus G. Cada qual certamente quereria o Instituto, desde que não fosse no Campus do "inimigo". Afinal a maioria quer a construção, mas a construção não se poderá fazer se todas as maiorias forem obedecidas!

O problema geral que se põe é o da transformação das escolhas individuais em escolhas colectivas, ou decisões sociais, e qual o melhor processo de a realizar. A passagem do individual ao colectivo e a diferença qualitativa das suas leis. De novo o paradigma do sistema complexo.

A situação de conflito entre vontades individuais e coerência das decisões colectivas foi assinalada já no século XVIII pelo Marquês de Condorcet num "*Ensaio sobre a aplicação da análise à probabilidade das decisões por maioria de votos*". Pode-se construir grande número de exemplos do paradoxo de Condorcet, ou efeito de Condorcet, usando situações bem comuns. Por exemplo, num levantamento de opinião, no mercado, sobre as escolhas entre três detergentes. Interrogam-se 3000 pessoas às quais se pede para compararem dois a dois os detergentes. Suponhamos que o resultado é o seguinte:

	A é melhor que B?	B é melhor que C?	C é melhor que A?
1000	S	S	N
1000	S	N	S
1000	N	S	S

O resultado, outra vez tomado por maioria absoluta de 2/3 em cada caso, é que A é melhor que B, B é melhor que C e, por sua vez, C é melhor que A. Uma contradição colectiva. Porém cada grupo de 1000 pessoas é perfeitamente coerente. O primeiro grupo ordena os detergentes na ordem ABC, o segundo na ordem CAB e o terceiro na ordem BCA.

Outro exemplo: suponhamos que o Futebol Clube do Porto[1] decide tornar-se um clube mais geométrico e adoptar como símbolo um polígono de quatro lados. Pergunta então aos seus nove milhões (?) de adeptos:

	Querem 4 lados iguais?	Querem 4 ângulos iguais?	Querem um quadrado?
3000000	S	S	S
3000000	S	N	N
3000000	N	S	N

A decisão, por maioria, é que querem 4 lados iguais, querem quatro ângulos iguais, mas *não* querem um quadrado. Perfeitamente lógico. O primeiro terço quer um quadrado, o segundo terço quer um losango e o terceiro quer um rectângulo. Lógico, mas colectivamente incoerente.

Haverá um método de escolha colectiva que evite estas incoerências? Formularemos o problema matematicamente. Dada uma *assembleia* de votantes A, vamos chamar a cada conjunto de votantes que votam igualmente a uma dada pergunta K uma coligação K_i. O índice i pode tomar o valor S ou N, correspondente a Sim ou Não. Assim, K_S e K_N são respectivamente os conjuntos de votantes que dizem Sim e Não à pergunta K. O que um *sistema de voto* faz é simplesmente dizer quais as coligações que vencem. Ao conjunto das coligações vencedoras vamos chamar V. No caso do *sistema de voto maioritário* uma coligação K_i será vencedora ($K_i \in V$) se tiver mais elementos que o seu complementar K_i^c

A primeira condição (C_i) dum sistema de voto coerente é que uma assembleia não deve poder, ao mesmo tempo, aceitar e rejeitar uma mesma proposta. Portanto

$$(C1) \qquad K_i \in V \text{ se e só se } K_i^c \notin V$$

A segunda condição é que, em face de duas propostas incompatíveis, a assembleia não deve poder adoptar as duas ao mesmo tempo. Duas propostas K e J serem incompatíveis significa que os conjuntos K_S e J_S são conjuntos distintos. Portanto J_S está contido em K_N ($K_N \supset J_S$) e K_S está contido em J_N ($J_N \supset K_S$). A segunda condição a propor ao sistema de voto é portanto

$$(C2) \qquad Se\ K_i \in V\ e\ J_j \supset K_i\ \ então\ \ J_j \in V$$

Finalmente para evitar o efeito de Condorcet tem de se por a condição seguinte:

$$(C3) \qquad Se\ K_i \in V\ e\ L_j \in V\ \ então\ \ K_i \cap L_j \in V$$

Esta condição é necessária e suficiente para evitar o efeito de Condorcet. De facto se $K_i \cap L_j \notin V$ cai-se exactamente no caso dos exemplos apresentados. Por outro lado se $K_i \cap L_j \in V$ para todas as coligações, há pelo menos um membro x_d da assembleia que pertence a todas as coligações vencedoras e, como estamos a admitir que todos os membros da assembleia são coerentes consigo próprios, qualquer cadeia de decisão tem necessariamente de ser coerente. Se não fosse, teria pelo menos x_d de ser incoerente, o que é contra a hipótese de que todos os membros da assembleia são coerentes.

Porém aqui aparece outro problema. Pela condição $C1$, do conjunto constituído por x_d apenas (que designamos por $\{x_d\}$) e seu complementar, só um deles pode pertencer a V. E como o complementar de $\{x_d\}$ não pode pertencer a V porque, por hipótese, x_d está na intersecção de todas as coligações vencedoras, então $\{x_d\} \in V$. Mas então nenhum outro elemento distinto de x_d pode pertencer à intersecção de todas as coligações vencedoras. Em conclusão:

O sistema de decisão que satisfaz a C1, C2 e C3 é aquele em que as coligações só são vencedoras se o indivíduo x_d estiver de acordo. Por outras palavras, a coerência total só é assegurada em regímen ditatorial!

Este resultado chama-se o teorema de Arrow. A moral da história fica ao gosto de cada um. Para aqueles que prezam a coerência a todo o preço só há um remédio: a ditadura. Para os que prezam a democracia, há que aceitar ocasionalmente um certo grau de incoerência nas decisões colectivas. É o preço a pagar.

Em matemática um sistema que satisfaz as condições $C1$, $C2$ e $C3$ chama-se um *ultrafiltro*. Um ultrafiltro que tem um elemento contido em todos os outros chama-se um *ultrafiltro trivial*. O teorema de Arrow é portanto a expressão do resultado bem conhecido de que *todo o ultrafiltro finito é trivial*.

Finito! E se for infinito? Se for infinito já há ultrafiltros não triviais, isto é, sistemas de voto que satisfazem $C1$, $C2$ e $C3$ e não são ditatoriais. Mas que nos importa isso se todas as assembleias humanas são finitas? De facto importa e é até instrutivo perceber a razão pela qual os ultrafiltros infinitos evitam o teorema do ditador.

Consideremos a assembleia dos números naturais (1, 2, 3, 4, ...), ou qualquer outra assembleia que numeramos com esses números. Queremos construir um sistema de voto (isto é um ultrafiltro) em bases democráticas, de voto maioritário. Primeiro consideramos os subconjuntos que são o complemento dum conjunto finito (os chamados conjuntos cofinitos). Claro que, como os conjuntos cofinitos são obviamente muito maiores que o seu complementar, vão pertencer às coligações vencedoras, isto é ao ultrafiltro. E para os subconjuntos infinitos cujo complementar é também infinito, quem é que vai pertencer ao ultrafiltro? Por exemplo: Quem é que ganha, são os números pares ou os números ímpares? Depende da escolha que se faça. E é neste tipo de escolhas, que envolvem um certo grau de discricionaridade, que o ultrafiltro infinito vai diferir essencialmente dum ultrafiltro finito. A estas escolhas chama-se por vezes, dum modo sugestivo, o estabelecimento das *hierarquias dominantes*.

Reanalisemos agora o exemplo da votação no Senado Universitário, mas com um Senado infinito (?). Suponhamos que os três grupos com opiniões diversas são os múltiplos de três, os múltiplos de três mais um e os múltiplos de três mais dois. Designamos estes conjuntos por (I), (II) e (III)

(I)	$3n$	S	S	N
(II)	$3n + 1$	S	N	S
(III)	$3n + 2$	N	N	N

Pela condição $C1$, ou (I) pertence a V ou o seu complementar. Suponhamos que é (I) que pertence a V (isto é, que é uma coligação vencedora). Se (II) pertencer a V então, pela condição $C3$, a intersecção de (I) e (II) também deve pertencer a V. Mas isso não pode acontecer porque a intersecção é vazia e portanto complementar dum cofinito. O mesmo raciocínio se aplica a (III).

Figura 8. O ditador e o seu ultrafiltro finito.

Em conclusão: se (I) pertence a *V* então, dos três conjuntos, só ele pertence a *V*. Isto é, só as decisões deste grupo é que contam. Não poderá então haver qualquer incoerência nas decisões. Também não há realmente violação da democraticidade porque (I) tem a mesma cardinalidade que a união de (II) e (III). É apenas feita uma escolha preferencial entre dois grupos com a mesma cardinalidade.

Qual é o valor metafórico deste exemplo matemático? Embora as assembleias humanas sejam finitas, quem é senão o governo, ou as classes dominantes, a escolher as perguntas que são feitas num plebiscito e a reservar-se o direito de tirar conclusões de um conjunto incompleto de perguntas? E não são, por exemplo, os partidos quem nos propõe como escolha apenas candidatos do mesmo tipo e com programas idênticos? O problema é que, como as sociedades humanas são finitas, estas escolhas das hierarquias dominantes, feitas talvez a bem da coerência (quem sabe?) violam necessariamente a democraticidade.

Mas voltemos ao nosso exemplo universitário. Conscientes do problema e desejosos de ser coerentes e democratas, como convém a um universitário, os nossos membros do Senado decidiram nomear um comité destinado a intervir na formulação das questões e na interpretação das respostas, de tal modo que, daí em diante, o sistema de voto no Senado fosse tão próximo quanto possível dum ultrafiltro infinito. Por isso lhe chamaram o CUI (Comité do Ultrafiltro Infinito). Claro que se estavam a iludir. Bastaria que dentro do Comité se gerassem contradições para que, em conjunto com o resto do Senado, lá viesse um Condorcet. Sim, porque ultrafiltros infinitos só os infinitos mesmo!

De qualquer modo a nomeação do CUI foi um êxito. O Presidente convocou uma conferência de imprensa para explicar o sucesso. Ninguém percebeu nada, mas todos ficaram contentes. E no dia seguinte veio no jornal local:

GRANDE DEBATE NA UNIVERSIDADE

A democracia é salva pelo Professor Ultrafiltro Infinito

Então qual é a matemática da complexidade, da complexidade em que vivemos? É a análise, a geometria, é a geometria fractal, a teoria da medida e as probabilidades, a teoria dos números. É a teoria da informação e da computabilidade e a teoria das linguagens e a lógica, ... Se calhar é toda a Matemática. Na sua comunicação ao Congresso Internacional dos Matemáticos, que teve lugar em Kyoto em 1990, Manin dizia que a

Matemática era uma Metáfora. Uma Metáfora sobre a Natureza e sobre a Humanidade.

E metáforas..., metáforas cada qual usa as que quer.

NOTAS

1 Esta conferência foi pronunciada na cidade do Porto (nota do Coord.)

BIBLIOGRAFIA

Complexity in Physics and Technology, M.S. Garrido e R. Vilela Mendes (eds.), World Scientific 1992.

Y.I.Manin; «Mathematics as Metaphor», em *Procedings do International Congress of Mathematicians*, Kyoto 1990, p. 1665.

Measures of complexity, L. Peliti e A. Vulpiani (eds.), Springer 1988.

P. Grassberger; «Problems in quantifying self-generated complexity», *Helvetica Physica Acta 62* (1989) 489.

D. Ruelle; *Hasard et chaos*, Editions Odile Jacob, 1991.

B. Mandelbrot; *The fractal geometry of Nature*, W.H. Freeman 1982.

K. Falconer; *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications*, Wiley 1990.

R. Vilela Mendes; «Os formalismos físicos e a realidade matemática» , in *Matemática e Cultura II, pp. 183-200*

G. Parisi; «On the emergence of free-like structures in complex systems» em *Perspectives on Biological Complexity*, p. 77, O.T. Solbrig e G. Nicolis (eds.) 1991.

H. Epstein e D. Ruelle; «Test of a probabilistic model of evolutionary sucess», *Physics Reports* 184 (1989) 289.

A. Maalouf; *Les croisades vues par les Arabes*, J.C. Lattès 1983.

P.Diaconis; «Applications of group representations to statistical problems», *Proceedings do International Congress of Mathematicians*, Kyoto 1990, p. 1037.

G. J. Chaitin; «Information, randomness and incompleteness», *World Scientific* 1990.

K. J. Arrow; *Social choice and individual values*, Wiley, New York, 1963.

L. Haddad; «Condorcet et les ultrafiltres» em *Mathématiques Finitaires et Analyse non Standard*, p. 333, Journées SMF, CIRM, Luminy, 1985.

Springer-Verlag Mathematics Calendar, 1981.