Deformações algébricas ou a Matemática como amplificador dos sentidos

R. Vilela Mendes
http://label2.ist.utl.pt/vilela/

Vila Real, Outubro 2018

Algebras e grupos são das estruturas mais básicas da Matemática e também as que mais se relacionam com as nossas acções no mundo natural. Exemplos: Rotações, translações, mudanças de coordenadas, etc.

Algebra $(A, +, \times)$ *Grupo* $(G, \bullet, \mathbf{1}, inv)$

Algebra de Lie

$A \times A \to A \quad \to \quad X \in A, Y \in A \Longrightarrow \quad [X, Y] \in A$

$[X, Y] = -[Y, X]\,; \quad [X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$

Grupo de Lie

O espaço do grupo é também uma variedade diferenciável

Translação (à esquerda) e *mapa diferencial* $(g, x \in G)$

$$L_g(x) = gx \qquad (L_g)_x^* : T_x(G) \to T_{gx}(G)$$

Campos vectoriais invariantes à esquerda $(L_g)_x^*(X(x)) = X(gx)$ formam uma algebra de Lie

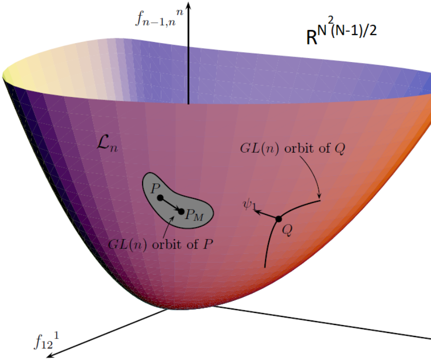
Inversamente o *mapa exponencial* $Exp(A) = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$ de um elemento da algebra de Lie é um elemento dum grupo de Lie

A variedade algébrica das algebras de Lie

Dada uma base $\{X_i; i = 1 \cdots N\}$ em A

$[X_i, X_j] = i f_{ijk} X_k$ (soma em k)

f_{ijk} = **constantes de estrutura** com $f_{ijk} = -f_{jik}$ e $f_{ilm} f_{jkl} + f_{jlm} f_{kil} + f_{klm} f_{ijl} = 0$ **Anti-simetria** e a **identidade de Jacobi** implicam que as algebras de Lie de dimensão N são uma **variedade algébrica** L^N em $\mathbb{R}^{N^2(N-1)/2}$



Deformações das algebras de Lie

Uma mudança linear de coordenadas em A não altera a algebra. Gera uma **órbita** de GL(N,R) em L^N.

$$X_i' = M_{ij} X_j \qquad f_{ijk}^{'} = M_{ia} M_{jb} \left(M^{-1}\right)_{ck} f_{abc}$$

Para $M_t = \mathbf{1} + tQ$ temos o novo producto da algebra isomorfa

$$M_t^{-1} \left[M_t X, M_t Y\right]_0 = [X, Y]_0 + t \left([X, QY]_0 - [Y, QX]_0 - Q\,[X, Y]_0\right) + \cdots$$

O termo de deformação é uma **2-cofronteira**.
Por outro lado para uma deformação arbitrária

$$[X, Y]_t = [X, Y]_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m (X, Y)\, t^m$$

anti-simetria e a identidade de Jacobi implicam $\psi_m (X, Y) = -\psi_m (Y, X)$
$[X, \psi_1 (Y, Z)] - [Y, \psi_1 (Y, Z)] + [Z, \psi_1 (X, Y)] - \psi_1 ([X, Y], Z) +$
$\psi_1 ([X, Z], Y) - \psi_1 ([Y, Z], X) = 0 \Longrightarrow \psi_1 (X, Y)$ é um **2-cociclo**.
Portanto a estabilidade (rigidez) duma algebra está associada às propriedades da sua cohomologia de Chevalley.

Cohomologia (Chevalley) da algebra de Lie

- **p-cocadeia:** *Mapa antisimétrico*
  $\psi_p(X_1, X_2, \cdots, X_p) : A \times A \times \cdots \times A \to A$
- **Operador cofronteira:**
  $\partial\psi_p(X_0, X_1, \cdots, X_p) =$
  $\sum_{r=0}^{p} (-1)^r \left[X_r, \psi_p\left(X_1, \cdots, \widehat{X_r}, \cdots, X_p\right)\right] +$
  $\sum_{r<s} (-1)^{r+s} \psi_p\left([X_r, X_s], \cdots, \widehat{X_r} \cdots, \widehat{X_s}, \cdots, X_p\right)$
- $\partial\psi_p$ é uma p+1-cocadeia e $\partial^2 = 0$
- **p-cociclo:** $\partial\psi_p = 0$. Espaço dos p-cociclos $= Z^p$
- **p-cofronteira** $\psi_p = \partial\phi_{p-1}$. Espaço das cofronteiras $= B^p$
  Porque $\partial^2 = 0$, uma cofronteira é necessáriamente um cociclo.
- **Grupos de cohomologia:** $H^p = Z^p / B^p$.

Portanto a identidade de Jacobi aplicada à deformação ψ_1
$[X, \psi_1(Y, Z)] - [Y, \psi_1(Y, Z)] + [Z, \psi_1(X, Y)] - \psi_1([X, Y], Z) + \psi_1([X, Z], Y) - \psi_1([Y, Z], X) = 0$ é simplesmente

$$\partial \psi_1 = 0$$

e a deformação infinitesimal entre algebras isomorfas
$t\left([X, QY]_0 - [Y, QX]_0 - Q[X, Y]_0\right)$ é

$$t\partial Q$$

sendo Q uma 1-cocadeia.
Resumindo:
O cone tangente a L^N na algebra $A \in L^N$, coincide com Z^2 (os 2-cociclos de A) e o subespaço relativo a algebras isomorfas é B^2, (cociclos que são cofronteiras).
Se todos os cociclos forem cofronteiras $\left(H^2 = 0\right)$ a algebra é rigida (estável). É uma condição suficiente, mas não necessária. H^2 pode ser não trivial mas apesar disso a algebra ser estável. Depende da natureza de H^3.

Algebras e modelos físicos

- Um modelo baseado numa algebra instável não é robusto. As constantes dos modelos são parametros experimentais que nunca são conhecidos com total precisão.
- Numa algebra instável uma pequena alteração nos parametros (constantes de estrutura) pode conduzir a resultados qualitativamente muito diferentes.
- A procura das teorias naturais através da estabilização de estruturas instáveis pode ser formulada como um princípio, o *princípio das teorias físicas estáveis*

- *Deformations, stable theories and fundamental constants*, J. Phys. A. Math. Gen. 27 (1994) 8091-8104.
- *The Stability of Physical Theories Principle*, em "The Algebraic Way. Space, Time and Quantum Beyond Peaceful Coexistence" I. Licata (Ed.), Imperial College Press 2016."

O *transhumanismo* é um movimento que visa aumentar as capacidades intelectuais e físicas dos humanos.

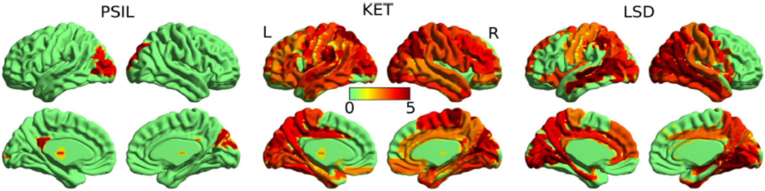
Duas abordagens na vertente intelectual:

Primeira: Expansão do cérebro por reconversão da glia em neurónios ou integração da electrónica no cérebro.

- *Turning Reactive Glia into Functional Neurons in the Brain*, J. Lu et al., Cell Stem Cell. 14 (2014) 133–134.
- *Direct Reprogramming of Resident NG2 Glia into Neurons with Properties of Fast-Spiking Parvalbumin-Containing Interneurons*, Stem Cell Reports 9 (2017) 742–751.
- *A multidisciplinary approach to study the functional properties of neuron-like cell models constituting a living bio-hybrid system*, S. Caponi et al., AIP Advances 6 (2016) 111303.

De grande interesse para reparação de lesões cerebrais, porém não é claro que aumentar o tamanho do cérebro altere qualitativamente as suas propriedades.

Segunda abordagem: Expansão da consciência pelo uso de drogas psicodélicas.



Increased spontaneous MEG signal diversity for psychoactive doses of ketamine, LSD and psilocybin, M. Schartner et al., nature/scientificreports/7:46421.

Os efeitos mais importantes são em zonas do cérebro importantes para a percepção, e não nas zonas associadas à linguagem ou ao movimento. Sugerido para tratamento para certos estados como a depressão. É apenas um aumento quantitativo da nossa máquina de processamento da informação que nos chega através dos sentidos. *Mais do mesmo!*

Os sentidos e a visão do mundo

Uma droga mais poderosa é a matemática que, como veremos, nos permite ir além dos sentidos.

Noções sobre o mundo físico que segundo a nossa percepção sensorial parecem correctas:

1. O correr do tempo não depende da velocidade. *O relógio no comboio anda ao mesmo ritmo que o da estação.*

Os sentidos e a visão do mundo

Uma droga mais poderosa é a matemática que, como veremos, nos permite ir além dos sentidos.

Noções sobre o mundo físico que segundo a nossa percepção sensorial parecem correctas:

1. O correr do tempo não depende da velocidade. *O relógio no comboio anda ao mesmo ritmo que o da estação.*
2. Todas as observáveis são compatíveis. *Faz sentido dizer que o automóvel de massa m passou no semáforo (posição x) com velocidade exactamente v.*

Os sentidos e a visão do mundo

Uma droga mais poderosa é a matemática que, como veremos, nos permite ir além dos sentidos.
Noções sobre o mundo físico que segundo a nossa percepção sensorial parecem correctas:

1. O correr do tempo não depende da velocidade. *O relógio no comboio anda ao mesmo ritmo que o da estação.*
2. Todas as observáveis são compatíveis. *Faz sentido dizer que o automóvel de massa m passou no semáforo (posição x) com velocidade exactamente v.*
3. Tempo e espaço são compatíveis. *Faz sentido dizer que estou aqui (posição exactamente x) agora (tempo exactamente t).*

Os sentidos e a visão do mundo

Uma droga mais poderosa é a matemática que, como veremos, nos permite ir além dos sentidos.
Noções sobre o mundo físico que segundo a nossa percepção sensorial parecem correctas:

1. O correr do tempo não depende da velocidade. *O relógio no comboio anda ao mesmo ritmo que o da estação.*
2. Todas as observáveis são compatíveis. *Faz sentido dizer que o automóvel de massa m passou no semáforo (posição x) com velocidade exactamente v.*
3. Tempo e espaço são compatíveis. *Faz sentido dizer que estou aqui (posição exactamente x) agora (tempo exactamente t).*
4. Os números reais definem as extensões do espaço e do tempo.

Os sentidos e a visão do mundo

- Sabemos hoje que 1. (independência de tempo e velocidade) e 2. (compatibilidade de todas as observáveis) não são noções correctas. A ser verdade 1. o GPS não funcionaria. A ser verdade 2. quase nada da moderna tecnologia existiria.

Os sentidos e a visão do mundo

- Sabemos hoje que 1. (independência de tempo e velocidade) e 2. (compatibilidade de todas as observáveis) não são noções correctas. A ser verdade 1. o GPS não funcionaria. A ser verdade 2. quase nada da moderna tecnologia existiria.
- 3. (compatibilidade das coordenadas do espaço-tempo) e 4. (espaço e tempo parametrizados pelos reais) o futuro o dirá.

Os sentidos e a visão do mundo

- Sabemos hoje que 1. (independência de tempo e velocidade) e 2. (compatibilidade de todas as observáveis) não são noções correctas. A ser verdade 1. o GPS não funcionaria. A ser verdade 2. quase nada da moderna tecnologia existiria.
- 3. (compatibilidade das coordenadas do espaço-tempo) e 4. (espaço e tempo parametrizados pelos reais) o futuro o dirá.
- *O que os nossos sentidos parecem dizer, a matemática mostra que o que seria estranho é que 1. e 2. fossem verdade. A matemática desmente os sentidos e assim funciona como um amplificador da nossa percepção da realidade.*

Clássicamente as transformações de coordenadas entre dois referenciais em movimento relativo com velocidade constante v são

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned}$$

Transformações de Galileu.
A algebra de Galileu, associada a estas transformações é

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] &= 0 \end{aligned}$$

em que J_i e K_i são respectivamente os geradores das rotações e das transformações de velocidade. Esta algebra é instável tendo um 2-cociclo não trivial. Não é uma 2-cofronteira

$$\psi(K_i, K_j) = i\epsilon_{ijk} J_k$$

Esta algebra é deformada para a algebra de Lorentz, que sendo semisimples é estável.

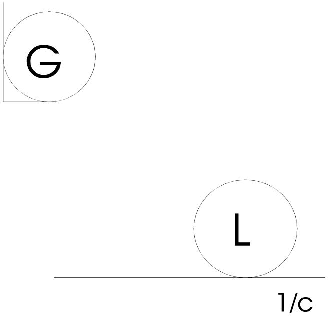
$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk} J_k \\
[J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk} K_k \\
[K_i, K_j] &= -i\tfrac{1}{c^2}\epsilon_{ijk} J_k
\end{aligned}$$

a que correspondem as **transformações de Lorentz**:

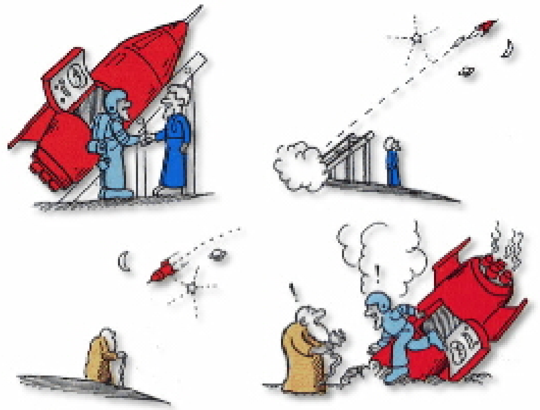
$$\begin{aligned}
x' &= \frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \frac{vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\
t' &= -\frac{v}{c^2}\frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}
\end{aligned}$$

1. Tempo, espaço e velocidade

A mecânica não-relativista é um ponto isolado $\left(\frac{1}{c}=0\right)$. Portanto aquilo que os nossos sentidos parecem intuir é patológico em relação à ordem natural das coisas. Uma Natureza em que $\frac{1}{c}$ fosse zero era bastante improvável. A matemática extende a nossa compreensão para além dos sentidos. As consequências são muitas: o GPS, os raios cósmicos que nos atravessam, etc. A Física de Galileu vive à beira do abismo. Logo que $\frac{1}{c}$ deixa de ser zero, a Física é relativista e completamente diferente



Tempo e espaço estão ligados e o tempo depende da velocidade. É o que a matemática nos diz que é natural. As consequências não são paradoxos. O contrário é que o seria



2. O mundo quântico

- O espaço de fases da mecânica clássica é uma variedade simplética $W = (T^*M, \omega)$ em que T^*M é o fibrado cotangente sobre o espaço de configuração M e ω é uma forma simplética. Em coordenadas locais (Darboux) (p_i, q_i)

$$d\,\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$$

O parêntesis de Poisson induz uma estrutura de algebra de Lie nas funções C^∞ em W,

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}_i} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}_i}$$

- Seja $T^*M = \mathbf{R}^{2n}$. Então,

$$\omega = \sum_{1 \leq \mathbf{i,j} \leq \mathbf{n}} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j = \sum_{1 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{n}} dx^i \wedge dx^{i+n}$$

2. O mundo quântico

- Consideremos o seguinte operador bidiferencial

$$P^r(f,g) = \sum_{\substack{i_1\cdots i_r \\ j_1\cdots j_r}} \omega^{i_1 j_1} \cdots \omega^{i_r j_r} \; \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_r}(f) \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_r}(g)$$

$P^1(f,g)$ é o parêntesis de Poisson. $P^3(f,g)$ é um $2-$cociclo não trivial que implica a instabilidade da algebra de Poisson e existência de deformações finitas (a menos que existam obstruções em H^3).

- Deformações estabilizadoras foram obtidas em condições muito gerais e, em particular, se W for the dimensão finita são equivalentes ao parêntesis de Moyal

$$[f,g]_M = \frac{2}{\hbar} sin(\frac{\hbar}{2} P)(f,g) = \{f,g\} - \frac{\hbar^2}{4.3!} P^{\mathbf{3}}(f,g) + \cdots$$

Pode também definir-se $[f,g]_M = \frac{1}{i\hbar}\left(f *_\hbar g - g *_\hbar f\right)$ com $f *_\hbar g$ um producto$-*$ associativo

$$f *_\hbar g = \exp\left(i \frac{\hbar}{2} P(f,g)\right)$$

2. O mundo quântico

- A algebra deformada de Moyal é equivalente à mecânica quantica em espaço de Hilbert através da correspondência de Weyl.
- Seja $f(p, q)$ uma função no espaço de fase e $\widetilde{f}$ a sua transformada de Fourier. Então associa-se à função f o seguinte operador no espaço de Hilbert

$$\mathbf{\Omega}(f) = \int \widetilde{f}(x_i, y_i) e^{-\frac{i}{\hbar}\sum x_i Q_i + y_i P_i} \, dx_i dy_i$$

em que $Q_i \boldsymbol{\psi} = \mathbf{x}_i \boldsymbol{\psi}$ e $P_i = -i\boldsymbol{\hbar} \frac{\partial}{\partial x_i} \boldsymbol{\psi}$. Então

$$[\mathbf{\Omega}(f), \mathbf{\Omega}(g)] = -i\boldsymbol{\hbar}\mathbf{\Omega}([f, g]_M)$$

em que do lado esquerdo está o comutador usual de operadores no espaço de Hilbert e do lado direito o parêntesis de Moyal.
- O mundo quântico que corresponde à estabilização da algebra de Poisson instável, pode ser descrita ou por operadores em espaço de Hilbert ou por uma algebra deformada no espaço de fase.

2. O mundo quântico

Outro modo de olhar para a instabilidade da mecânica clássica é examinar a algebra das posições e dos momentos (ou velocidades)
As grandezas (observáveis) que caracterizam o movimento dos corpos são a posição $\overrightarrow{x}$ e o momento $\overrightarrow{p} = \frac{m_0 \overrightarrow{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{v}}{c}\right)^2}}$. No caso clássico

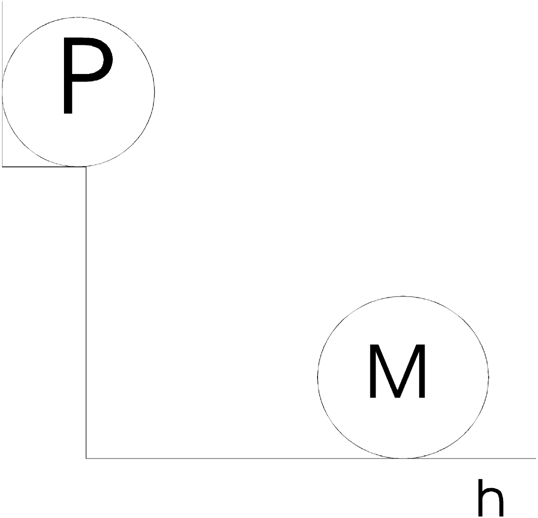
$$[\overrightarrow{p}, \overrightarrow{x}] = 0$$

isto é posição e momento são observáveis compatíveis. A passagem para a teoria quântica corresponde a

$$[p_i, x_j] = i\delta_{ij}\hbar$$

em que $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h a constante de Planck. A estrutura da teoria seria qualitativamente a mesma para qualquer valor não-nulo de $\hbar$. Portanto a teoria clássica é também um ponto isolado $\hbar = 0$ (instável para qualquer pequena deformação).

A instabilidade da teoria clássica



As noções dos sentidos que a matemática contradiz

1 - O correr do tempo não depende da velocidade. *O relógio no comboio anda ao mesmo ritmo que o da estação.*
2 - Todas as observáveis são compatíveis. *Faz sentido dizer que o automóvel de massa m passou no semáforo (posição x) com velocidade exactamente v.*

- Como vimos, a matemática mostra que exactamente o contrário destas noções é que era de esperar num mundo normal. E quase toda a tecnologia moderna se baseia nesses facto.
- O que vai acontecer às outras noções induzidas pelos sentidos?
  3 - Tempo e espaço são compatíveis. *Faz sentido dizer que estou aqui (posição exactamente x) agora (tempo exactamente t).*
  4 - Os números reais definem as extensões do espaço e do tempo.
- O futuro o dirá.
- Mas o que é a matemática já nos diz?

A algebra de Poincaré-Heisenberg (que contêm a relatividade e a mecânica quântica**)**

$$\begin{aligned}
\left[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\right] &= i\left(M^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} + M^{\nu\rho}\eta^{\mu\sigma} - M^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho} - M^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}\right) \\
\left[M^{\mu\nu}, p^{\lambda}\right] &= i\left(p^{\mu}\eta^{\nu\lambda} - p^{\nu}\eta^{\mu\lambda}\right) \\
\left[M^{\mu\nu}, x^{\lambda}\right] &= i\left(x^{\mu}\eta^{\nu\lambda} - x^{\nu}\eta^{\mu\lambda}\right) \\
\left[p^{\mu}, x^{\nu}\right] &= i\eta^{\mu\nu}1 \\
\left[x^{\mu}, x^{\nu}\right] &= 0 \\
\left[p^{\mu}, p^{\nu}\right] &= 0
\end{aligned}$$

Não é estável.

3. O espaço-tempo não comutativo (uma estabilização de Poincaré-Heisenberg)

$$
\begin{aligned}
[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= i(M^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} + M^{\nu\rho}\eta^{\mu\sigma} - M^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho} - M^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}) \\
[M^{\mu\nu}, p^{\lambda}] &= i(p^{\mu}\eta^{\nu\lambda} - p^{\nu}\eta^{\mu\lambda}) \\
[M^{\mu\nu}, x^{\lambda}] &= i(x^{\mu}\eta^{\nu\lambda} - x^{\nu}\eta^{\mu\lambda}) \\
[p^{\mu}, x^{\nu}] &= i\eta^{\mu\nu}\Im \\
[x^{\mu}, x^{\nu}] &= -i\epsilon\ell^2 M^{\mu\nu} \\
[p^{\mu}, p^{\nu}] &= -i\epsilon'\phi^2 M^{\mu\nu} \\
[x^{\mu}, \Im] &= i\epsilon\ell^2 p^{\mu} \\
[p^{\mu}, \Im] &= -i\epsilon'\phi^2 x^{\mu} \\
[M^{\mu\nu}, \Im] &= 0
\end{aligned}
$$

Muitas consequências. Tempo ou espaço quantizados, desvios de c para trens de onda, extensão da algebra exterior, etc. Ver por exemplo**:**

- *Quantum mechanics and non-commutative space-time*, Phys. Lett. A 210 (1996) 232-240
- *Geometry, stochastic calculus and quantum fields in a non-commutative space-time*, J. Math. Phys. 41 (2000) 156-186.
- *Non-commutative space-time and the uncertainty principle*, Phys. Lett. A 290 (2001) 109-114
- *Some consequences of a noncommutative space-time structure*, Eur. Phys. J. C 42 (2005) 445-452
- *The deformation-stability fundamental length and deviations from c*, Phys. Lett. A 376 (2012) 1823-1826.
- *A laboratory scale fundamental time?*, Eur. Phys. J. C 72 (2012) 2239
- *An extended Dirac equation in noncommutative space-time,* Mod. Phys. Lett. A 31 (2016) 1650089
- *The geometry of noncommutative spacetime,* Int. J. Th. Phys. 56 (2017) 259–269

4. O espaço-tempo e as algebras de divisão

Para caracterizar quantitativamente as extensões no espaço-tempo é natural exigir as seguintes propriedades ao conjunto numérico $\mathcal{A}$:

- $a, b \in \mathcal{A} \Longrightarrow a + b \in \mathcal{A}$ **Soma**
- $a, b \in \mathcal{A} \Longrightarrow a * b \in \mathcal{A}$ **Multiplicação**
- $a * x = x * a = 1$, etc. **Divisão**

Isto é, necessitamos do que se chama uma "algebra de divisão".

E que algebras de divisão existem ?

- Os reais
- Os complexos
- Os quaterniões
- Os octoniões

E porquê pensar que devemos usar os reais? E porque é que os nossos sentidos nos conduzem nesse sentido? E quais as consequências se assim não fôr?

Aqui também a Matemática nos pode dar algumas pistas.

Questões para o futuro!

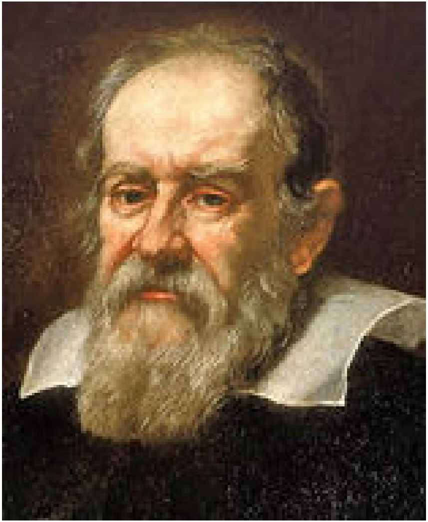
Conclusões

- Em conclusão: no que respeita à extensão da percepção e dos sentidos, a Matemática é uma droga poderosa.

Conclusões

- Em conclusão: no que respeita à extensão da percepção e dos sentidos, a Matemática é uma droga poderosa.
- E ainda não está proibida!

Galileu e o livro da Natureza



La filosofia è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'Universo), ma non si può intendere, se prima non il sapere a intender la lingua, e conoscer i caratteri ne quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.

Galileu e o livro da Natureza

É talvez menos conhecido que o ensaio em que Galileu faz esta afirmação magnífica defende alguns pontos de vista errados sobre a natureza dos cometas. Isto apenas mostra que a Ciência se faz de avanços e recuos, erros e progressos. A Ciência assim como todas as outras actividades humanas.